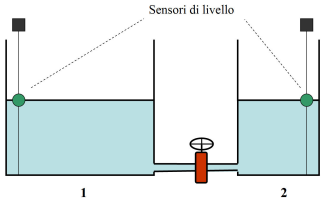
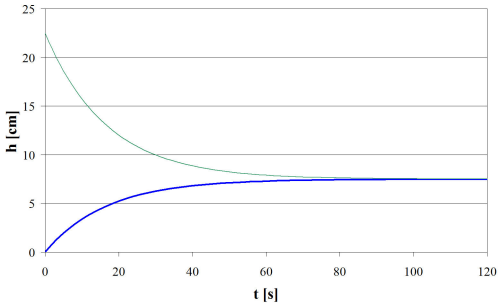
Equilibrio
Fenomeni idraulici

ESERCIZIO

Due vasi cilindrici, di sezioni diverse (vaso **1** con area di base $A_1 = 40\,\mathrm{cm}^2$ e vaso **2** con area di base $A_2 = 20\,\mathrm{cm}^2$), provvisti di due sensori di livello, sono collegati come illustrato nella figura sottostante. Uno dei due vasi viene riempito con 450 mL di acqua mentre l'altro è inizialmente vuoto. In un secondo tempo si apre il rubinetto del tubo di collegamento e, mentre l'acqua fluisce da un recipiente all'altro, si registrano i valori del livello tramite i due sensori. I risultati sono riportati sul grafico sottostante. Nella figura a sinistra è raffigurata la situazione finale una volta raggiunto l'equilibrio:





Rispondi ai seguenti quesiti illustrando il tuo ragionamento:

a) Quale dei due vasi era stato riempito con acqua all'inizio dell'esperimento?

b) Riporta sul grafico sottostante, in modo qualitativo ma accurato, con due colori differenti (blu per il vaso 1 e verde per il vaso 2) come pensi che cambiano i volumi di acqua nei due vasi al passare del tempo mentre l'acqua fluisce da un vaso all'altro.

SOLUZIONE

a) L'equilibrio viene raggiunto ad un livello che risulta più vicino a quello del livello iniziale del vaso che possiede una capacità idraulica maggiore, in questo caso il vaso 1. La curva che rappresenta la variazione minore di livello è quella che rappresenta il vaso inizialmente vuoto (curva blu), cioè il vaso 1. Il vaso riempito all'inizio dell'esperienza era quindi il vaso 2.

b) Riassumiamo il problema nella tabella seguente:

		Vaso 1	***Vaso 2***
	$C_{idr}(\mathrm{cm}^2)$	40	20
iniziale	$h_i(\mathrm{cm})$	0	$22,5$
	$V_i(\mathrm{mL})$	0	450
variazione	$\triangle V$ (mL)	x	$-x$
equilibrio	V_{eq} (mL)	x	$450-x$
	$h_{eq}(\mathrm{cm})$	$\frac{x}{40}$	$\frac{450-x}{20}$

Ora, scrivendo la condizione d'equilibrio utilizzando la grandezze intensiva e l'equazione di bilancio sulla grandezza estensiva per i due vasi formiamo un sistema di equazioni che ci permette di risolvere il problema:

$$\begin{array}{c}\text{condizione di equilibrio}\\ \text{equazione di bilancio: Vaso 1}\\ \text{equazione di bilancio: Vaso 2}\end{array} \left\{\begin{array}{rcl} h_{eq}(1) & = & h_{eq}(2) \\ V_{eq}(1)-V_i(1) & = & x \\ V_{eq}(2)-V_i(2) & = & -x \end{array}\right.$$

Utilizziamo la capacità idraulica per sostituire la grandezza intensiva con quella estensiva nella prima equazione:

$$\begin{array}{c}\text{condizione di equilibrio}\\ \text{equazione di bilancio: Vaso 1}\\ \text{equazione di bilancio: Vaso 2}\end{array} \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{V_{eq}(1)}{C_{idr}(1)} & = & \dfrac{V_{eq}(2)}{C_{idr}(2)} \\ V_{eq}(1) & = & V_i(1)+x \\ V_{eq}(2) & = & V_i(2)-x \end{array}\right.$$

Possiamo inserire i valori numerici:

$$\begin{array}{c}\text{condizione di equilibrio}\\ \text{equazione di bilancio: Vaso 1}\\ \text{equazione di bilancio: Vaso 2}\end{array} \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{V_{eq}(1)}{40\,\mathrm{cm}^2} & = & \dfrac{V_{eq}(2)}{20\,\mathrm{cm}^2} \\ V_{eq}(1) & = & x \\ V_{eq}(2) & = & 450\,\mathrm{mL}-x \end{array}\right.$$

Le equazioni che esprimono il bilancio della grandezza estensiva all'equilibrio possono ora essere sostituite nella condizione di equilibrio e l'equazione risultante risolta per x:

$$\frac{x}{40\,\mathrm{cm}^2} = \frac{450\,\mathrm{mL} - x}{20\,\mathrm{cm}^2} \Leftrightarrow x = 300\,\mathrm{mL}$$

Risolvendo otteniamo:

$$\begin{cases} h_{eq} = \dfrac{V_{eq}}{C_{idr}} = \dfrac{300\,\mathrm{mL}}{40\,\mathrm{cm}^2} = \dfrac{150\,\mathrm{mL}}{20\,\mathrm{cm}^2} = 7,5\,\mathrm{cm} \\ V_{eq}(1) = x = 300\,\mathrm{mL} \\ V_{eq}(2) = 450\,\mathrm{mL} - x = 150\,\mathrm{mL} \end{cases}$$

c) Evoluzione del volume nei due vasi in funzione del tempo:

